1-3

УДК 621.396.946

В.М. Зуев
г. Донецк, Украина
zvm05@mail.ru

Простая аналитическая формула решения уравнений для двухмерного разностно-дальномерного метода определения координат

В противоположность широко известным итерационным методам решения уравнений для двухмерного разностно-дальномерного метода определения координат предлагается простая аналитическая формула решения.

Введение

Разностно-дальномерный метод определения координат широко применяется в навигации и системах мониторинга источников радиоизлучения. Он имеет однозначное решение при использовании данных о времени прихода сигнала при четырех (или более) позициях измерения. В настоящее время известны многочисленные итерационные способы решения уравнений этого метода [1-3].

Между тем эти уравнения имеют простое аналитическое решение, которым автор пользуется на протяжении ряда лет.

Целью данной работы является получение простой аналитической формулы для вычислений в устройствах, требующих быстродействия и имеющих ограниченный вычислительный ресурс.

Вывод формулы решения

Особенно просто это решение выглядит в случае двумерной задачи. Такая задача до сих пор актуальна в автономных системах ближней морской навигации, в системах наземного мониторинга источников радиоизлучения, в радиоразведке и в других практических задачах.

Пусть $\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$ есть априори известные координаты соответственно нулевой, первой, второй, третьей позиции измерения, а $\{x_T, y_T\}$ – координаты цели. Координаты целей подлежат определению по измеренным величинам задержек τ1, τ2, τ3 времени между сигналами, которые прошли по пути по ломаной $\{x_T, y_T\} - \{x_i, y_i\} - \{x_0, y_0\}$ (i = 1,2,3), и сигналами, прошедшими по прямому пути $\{x_T, y_T\} - \{x_0, y_0\}$. В некоторых случаях измеряются разности t_i прихода сигналов между пунктами $\{x_i, y_i\}$ и $\{x_0, y_0\}$. Задачи эквивалентны между собой, так как между t_i и τ_i имеется связь:

$$t_i = c * \tau_i + r_i, \tag{1}$$

где с – скорость света (в дальнейшем принимаем с=1),

τ_i – расстояние между пунктами $\{ x_T , y_T \}$ и $\{ x_0 , y_0 \}$ Традиционные способы решения задачи в конечном счете сводятся к следующему. Если обозначить $\vec{v} = \{ x_T , y_T \}$ вектор положения цели, а A_i (i=1,2,3) матрицу квадратичной формы $\vec{v} * A_i * \vec{v} = 1$, порождающую гиперболу

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_i^2} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где a_i – большая полуось гиперболы, равная

$$a_i = \frac{t_i}{2}; \qquad (3)$$

b_i – малая полуось гиперболы, такая, что

$$b_i^2 = c_i^2 - a_i^2 , \qquad (4)$$

где

$$c_i = \frac{r_i}{2} , \qquad (5)$$

то решение навигационной задачи обычно сводится к отысканию общего решения системы трех уравнений из квадратичных форм

$$(\vec{v}_i - \vec{r}_i / 2)' * T_i' * A_i * T_i * (\vec{v}_i - \vec{r}_i / 2) = 1 \quad \text{(i=1,2,3)}, \qquad (6)$$

где

$$T_i = \frac{1}{r_i} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ -y_i & x_i \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Вообще, без уменьшения общности всегда можно положить $\{ x_0 , y_0 \} = \{0,0\}$.

Уравнения (6) представляют собой систему трех квадратичных уравнений. Ее решение различными итерационными методами не составляет больших трудностей, однако значительное количество циклов итераций может привести к определенным затратам времени.

Получим формулу, по которой вместо итерационного решения (6) можно получить прямое решение непосредственно.

Обозначая

$$\vec{R} = \{ \text{x}_\text{T}, \text{y}_\text{T} \},\ \vec{R}_i = \vec{R} - \vec{r}_i,\ r_i = \sqrt{(\vec{v}_i, \vec{v}_i)},\ R_i = \sqrt{(\vec{R}_i, \vec{R}_i)},\ R = \sqrt{(\vec{R}, \vec{R})} \qquad (9)$$

(здесь скобки подразумевают скалярные произведения) из уравнения разности хода сигналов

$$R_i + r_i - R = \tau_i . \qquad (10)$$

С учетом (1) при с=1 имеем

$$R_i = R + t_i . \qquad (11)$$

Возводя (11) в квадрат, получаем

$$R_i^2 = R^2 + t_i^2 + 2 * R * t_i . \qquad (12)$$

С другой стороны, из уравнения треугольника $\{0,0\} - \{x_T, y_T\} - \{x_i, y_i\}$ имеем

$$R_i^2 = R^2 + r_i^2 - 2 * r_i * R * (\vec{e}_i, \vec{e}_T), \tag{13}$$

где

$$\vec{e}_i = (x_i * \vec{i} + y_i * \vec{j}) / r_i, \tag{14}$$

$$\vec{e}_T = (x_T * \vec{i} + y_T * \vec{j}) / R \tag{15}$$

есть единичные вектора, такие, что

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1, \ (\vec{e}_T, \vec{e}_T) = 1. \tag{16}$$

Введем обозначения

$$x = \frac{x_T}{R}, \quad y = \frac{y_T}{R}. \tag{17}$$

Тогда

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_T) = (x_i * x + y_i * y) / r_i. \tag{18}$$

Вычитая из (12) уравнение (13), получаем три уравнения

$$R = \frac{1}{2} * \frac{(r_i^2 - t_i^2)}{(t_i + r_i * (\vec{e}_i, \vec{e}_T))} \quad \text{(i=1,2,3)}. \tag{19}$$

Вводя обозначение

$$u_i = r_i^2 - t_i^2 \tag{20}$$

и попарно вычитая величины обратные R из уравнений (19), получим три уравнения

$$(x_i * x + y_i * y) / u_i - (x_j * x + y_j * y) / u_j = t_j / u_j - t_i / u_i \quad \text{(i,j=1,2,3 } i \neq j\text{)}, \tag{21}$$

которые лучше выглядят как

$$A_{i,j} * x + B_{i,j} * y = C_{i,j} \quad \text{(i,j=1,2,3 } i \neq j\text{)}, \tag{22}$$

где

$$A_{i,j} = u_j * x_i - u_i * x_j, \tag{23}$$

$$B_{i,j} = u_j * y_i - u_i * y_j, \tag{24}$$

$$C_{i,j} = u_i * t_j - u_j * t_i. \tag{25}$$

Нетрудно показать из (6), что ранг системы (22) равен 2 (причем даже в трехмерном случае). Таким образом, чтобы найти x и y, достаточно в (22) решить любую пару уравнений. Решение (22) находим по правилу Крамера.

$$x = \frac{\Delta x_{ijk}}{\Delta_{ijk}}, \tag{26}$$

$$y = \frac{\Delta y_{ijk}}{\Delta_{ijk}}, \tag{27}$$

где

$$\Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ A_{ik} & B_{ik} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

$$\Delta x_{ijk} = \begin{vmatrix} C_{ij} & B_{ij} \\ C_{ik} & B_{ik} \end{vmatrix}, \tag{29}$$

$$\Delta y_{ijk} = \begin{vmatrix} A_{ij} & C_{ij} \\ A_{ik} & C_{ik} \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Здесь везде каждое из i, j, k может принимать значения 1,2,3, причем $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$.

Следующим шагом находим R, подставляя (26) и (27) в (18) и (19).

И окончательно, учитывая, что $\vec{R} = R * \vec{e}_T$, находим x_T и y_T

$$x_T = R * x, \qquad (31)$$

$$y_T = R * y. \qquad (32)$$

Проведя подстановку (26) и (27) в (31) и (32), и вводя обозначения (здесь $| \; |$ обозначают детерминант)

$$m_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} t_i & x_i \\ t_j & x_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_i & y_i \\ t_j & y_j \end{vmatrix}}, \qquad (33)$$

$$n_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_j & u_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_i & y_i \\ t_j & y_j \end{vmatrix}} \qquad (34)$$

после несложных преобразований, получаем окончательно

$$x_t = \frac{n_{ij} - n_{ik}}{m_{ij} - m_{ik}}, \qquad (35)$$

$$y_t = n_{ij} - m_{ij} * x_t. \qquad (36)$$

Итак, алгоритм решения таков.

Шаг 1. Зная текущие позиции измерителей и измерив задержки τ_i, (i=1,2,3), вычисляем $t_i = \tau_i - r_i$ и затем по (20) $u_i = 2 * r_i * \tau_i - \tau_i^2$.

В случае, когда t_i известно из измерений, по (1) и (20) вычисляем $u_i = 2 * r_i * \tau_i - \tau_i^2$

Шаг 2. Вычисляем любую пару отношений детерминантов по (32) и по (33).

Можно выбрать лучшую из соображений точности вычислений.

Шаг 3. Вычислить искомые координаты цели по (34) и (35)

Например:

$$x_T = \frac{n_{12} - n_{13}}{m_{12} - m_{13}} \qquad (37)$$

$$y_T = n_{12} - m_{12} * x_t. \qquad (38)$$

В заключение отметим, что уравнения (20) справедливы и в трехмерном случае.

Здесь так же достаточно найти только два неизвестных x и y, так как третья координата z единичного вектора связана с ними уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Однако вид решения получается довольно громоздким.

Выводы

Предложенная формула может быть использована для вычислений в устройствах, требующих быстродействия и имеющих ограниченный вычислительный ресурс, а также как хорошее начальное приближение для итерационных методов.

Литература

1. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / [Шебшаевич В.С. и др.] ; под ред. В.С. Шебшаевича. – [2-е изд.] – М. : Радио и связь, 1993. – 408с.
2. Голован А.А. Спутниковая навигация. Задачи обработки первичных измерений спутниковой навигационной системы для геофизических приложений / А.А. Голован, Н.Б. Вавилова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 7. – С. 181-196.
3. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим / [Голован А.А., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Трубников С.А.]. – М. : Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2001.

В.М. Зуєв
Проста аналітична формула вирішення рівнянь для двомірного різницево-далекомірного методу визначення координат
У протилежність широко відомим ітераційним методам вирішення рівнянь для двомірного різницево-далекомірного методу визначення координат пропонується проста аналітична формула рішення.

V.M. Zuev
Simple Analytical Formula for Solving Equation of Two-Dimensional Range-Difference Method for Position Measurement
Contrary to well-known iterative methods for solving equation of two-dimensional range-difference method for position measurement simple analytical formula is offered.

Статья поступила в редакцию 22.11.2010.